

О взаимодействии точечных зарядов в произвольной области

А. С. Зильберглейт*, И. М. Неменман†, И. В. Мандель‡
Gravity Probe B, W. W. Hansen Experimental Physics Laboratory,
Stanford University, Stanford, CA 94305-4085, USA

14 августа 2002 г.

Аннотация

Разработан систематический подход к расчету электростатической силы между точечными зарядами в произвольном объеме с произвольными граничными условиями. В присутствии границы простое правило вычисления силы, дающее ее как “заряд, умноженный на напряженность поля, в котором он находится”, становится неверным. Это правило можно, однако, сохранить, переопределив внешнее поле так, чтобы оно включало все члены, не расходящиеся в точке заряда, в том числе и те, что вызваны взаимодействием самого заряда с физической границей. Доказательство этого модифицированного закона проведено с помощью геометрической регуляризации, позволяющей проанализировать и преодолеть расходимость энергии самодействия точечных зарядов.

1 Введение

Формула расчета силы, с которой внешнее электрическое поле ¹ действует на точечный заряд, знакома всем со школьной скамьи: “сила равна произведению заряда на напряженность поля, в котором он находится”. Этим правилом можно пользоваться и в том случае, когда поле создается другими точечными зарядами.

Ситуация, однако, существенно меняется, когда поле создается группой точечных зарядов, находящихся внутри произвольного объема с какой-либо физической границей, присутствие которой отражено в соответствующих граничных условиях. Тогда само понятие “поля, в котором находится заряд,” становится плохо определенным. Действительно, наивный подход к задаче с одним-единственным зарядом (находящимся, например, около проводящей плоскости) приводит к абсурдному заключению о равенстве нулю силы, действующей на заряд: ведь здесь *все* поле вызвано самим зарядом (иных источников просто нет!), значит, “поле, в котором находится заряд,” равно нулю.

Более опытный физик может, конечно, сказать, что только та часть поля, которая расходится как $1/r^2$ около заряда, непосредственно создана им самим, а остальные члены являются следствием граничных условий, которые математически описывают перераспределение *других* физических зарядов на границе. Поэтому именно остаток после вычитания сингулярного члена дает “поле, в котором находится заряд”. Тем не менее, это остается лишь догадкой, на фоне точного расчета потенциалов и полей; чтобы не снижать уровня строгости, справедливость догадки следует доказать. Это тем более имеет смысл сделать ввиду того, что выбор членов, дающих вклад в силу, далеко не очевиден.

Таким образом, представляется важным дать строгое доказательство *измененного* правила “сила равна заряду, умноженному на ту часть поля, которая не расходится в точке, где находится заряд” и выяснить границы его применимости. Для этого естественно использовать фундаментальный закон сохранения энергии, дающий силу как минус градиент энергии в точке расположения заряда. Но и такой подход немедленно сталкивается с трудностями, так как энергия точечных зарядов бесконечна из-за их самодействия.

Возможно, именно из-за этих трудностей, а также благодаря обманчивой простоте задачи, попытки найти хоть какие-то относящиеся к делу результаты в литературе, в частности, известных учебниках и монографиях [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10], не приводят к успеху, если не считать нескольких абзацев из книги [6], которые мы обсудим в разделе 4).

Ввиду этого, в настоящей работе мы даем строгий вывод общего выражения для силы, действующей на точечный заряд. Вывод состоит из (геометрической) регуляризации задачи, расчета силы на основе (регуляризованной и конечной) энергии, и рассмотрения сингулярного предельного перехода. Результат полностью подтверждает интуитивные физические соображения.

*gleit@relgyro.stanford.edu

†nemenman@itp.ucsb.edu

‡ilya@caltech.edu

¹ Слово “внешнее” означает, что поле создается другими источниками, а границы находятся вдалеке от заряда.

2 Электростатическая задача с точечными зарядами в объеме: потенциал и энергия

Рассмотрим произвольную трехмерную область D с идеально проводящей границей S и N точечными электрическими зарядами внутри. В этом случае электрический потенциал, $\psi(\mathbf{r})$, определяется с помощью граничного условия Дирихле (мы используем единицы СИ на протяжении всей работы):

$$\Delta\psi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in D; \quad (1)$$

$$\psi \Big|_S = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ – радиус-вектор точки, $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{e}_x + y_i\mathbf{e}_y + z_i\mathbf{e}_z$ задает местоположение i -того заряда, а $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = x, y, z$ суть орты некоторой прямоугольной системы координат.

В соответствии с принципом суперпозиции, потенциал $\psi(\mathbf{r})$ равен сумме потенциалов, вызванных отдельными зарядами,

$$\psi(\mathbf{r}) = \kappa \sum_{j=1}^N q_j G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \quad (3)$$

$$\equiv \kappa \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \right], \quad (4)$$

причем $\kappa = 1/4\pi\varepsilon_0$, а $G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ – регулярная часть функции Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j)$ данной задачи [т. е. ее решение при $q_j = 1$, $q_i = 0$, $i \neq j$ в уравнении (1)]. Обе эти функции, разумеется, симметричны:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = G(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}), \quad G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) = G_R(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}). \quad (5)$$

Перепишем выражение (4), разделяя потенциал на сумму сингулярных и регулярных слагаемых,

$$\psi(\mathbf{r}) = \kappa \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \psi_R(\mathbf{r}), \quad (6)$$

$$\psi_R(\mathbf{r}) \equiv \kappa \sum_{j=1}^N q_j G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j); \quad (7)$$

здесь $\psi_R(\mathbf{r})$ – регулярная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа везде в D [а также, по непрерывности, в любой регулярной точке ² границы S , хотя это несущественно для данного подхода.] Заметим, что и сам потенциал, ψ , и его регулярная часть, ψ_R , зависят как от расположения зарядов $\mathbf{r}_i$, так и от точки, в которой измеряется потенциал, $\mathbf{r}$. Это явно указано в полной записи,

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (8)$$

$$\psi_R(\mathbf{r}) \equiv \psi_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (9)$$

Предположим, что потенциал известен, и необходимо рассчитать силу $\mathbf{F}^i$, действующую на заряд q_i . По закону сохранения энергии, эта сила равна (см. [6])

$$\mathbf{F}^i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W_D, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y_i} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{e}_z \quad (10)$$

где W_D – энергия поля в области D ,

$$W_D = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_D (\nabla\psi)^2 dV \quad (11)$$

(оба символа, ∇ и $\partial/\partial \mathbf{r}$, обозначают градиент; в каждом случае мы используем тот или другой, исходя из удобства записи).

Трудность, однако, заключается в том, что интеграл (11, очевидно, расходится из-за самодействия точечных зарядов (энергия одного точечного заряда бесконечна). Мы докажем, что, хотя для данного распределения точечных зарядов энергия бесконечна, *разница* между двумя значениями энергии, соответствующими двум любым таким распределениям, *конечна независимо от формы границы*, и стремится к нулю, когда одно распределение стремится к другому; следовательно, *сила тоже оказывается конечной*, в соответствии с интуитивными представлениями. Эта ситуация с энергией напоминает ту, которая возникает при расчете эффекта Казимира (см. [12]), также требующего регуляризации.

²Мы допускаем граничные сингулярности, как, например, ребра и острия, предполагая возле них выполнение условия типа Мейснера [11], гарантирующего конечность энергии; область D может быть и неограниченной.

3 Регуляризованная энергия и сила, действующая на заряды

Окружим каждый заряд q_i малой сферой S_i^ϵ радиуса ϵ ; пусть D_i^ϵ обозначает внутренность этой сферы. Пусть D^ϵ обозначает область D за вычетом всех областей D_i^ϵ , а S^ϵ - объединение S и всех сферических поверхностей S_i^ϵ (см. Рис. 1). Таким образом, S^ϵ является границей области D^ϵ , причем $D^\epsilon = D$, $S^\epsilon = S$, когда $\epsilon = 0$.

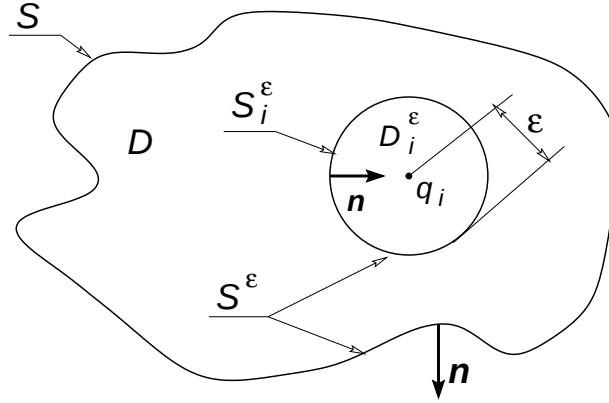


Рис. 1: Области, поверхности и нормали.

Используя соотношение (10), можно определить силу, действующую на заряд q_i , по формуле

$$\mathbf{F}^i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}_\epsilon^i = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} W_D^\epsilon, \quad (12)$$

где W_D^ϵ - регуляризованная энергия, то есть энергия поля в области D^ϵ , величина которой конечна из-за отсутствия там особенностей (точечных зарядов). Следует обратить внимание на порядок действий в определении (12): сначала берется градиент регуляризованной энергии в точке расположения заряда, а затем (сингулярный) предел. В принципе, следует также доказать, что конечный результат не зависит от выбора метода регуляризации; этот вопрос обсуждается в разделе 4.

В силу формулы (11) и того, что итоговый потенциал, который дается представлением (3) или (6), регулярен в D^ϵ , регуляризованная энергия равна

$$W_D^\epsilon \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \int_{D^\epsilon} (\nabla \psi)^2 dV \quad (13)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{S^\epsilon} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{D^\epsilon} \psi \Delta \psi dV; \quad (14)$$

где n - направление *внешней* нормали к S^ϵ (и, соответственно, *внутренней* нормали к сферам S_i^ϵ). В случае, если область D бесконечна, предположим еще, что потенциал и его градиент достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности, чтобы вклад от интеграла по сфере большого радиуса в пределе стремился к нулю.

Поскольку ψ - гармоническая функция всюду в D^ϵ , интеграл по объему в правой части предыдущего равенства исчезает; оставшийся интеграл по поверхности можно записать как

$$W_D^\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{k=1}^N \int_{S_k^\epsilon} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA + \frac{\epsilon_0}{2} \int_S \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA \quad (15)$$

и далее, используя граничное условие (2), как

$$W_D^\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{k=1}^N \int_{S_k^\epsilon} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA. \quad (16)$$

В конечном итоге нас интересует предел $\epsilon \rightarrow 0$, поэтому необходимо учитывать только те члены, которые дают вклад в этом пределе. Поскольку площадь, по которой идет интегрирование в предыдущей формуле, пропорциональна ϵ^2 , мы сохраняем только те члены под интегралом, которые в пределе растут не медленнее, чем ϵ^{-2} . Учитывая это и используя выражение (6) для потенциала, можно записать интеграл по поверхности, стоящий в равенстве (16), в виде

$$\int_{S_k^\epsilon} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA = \int_{S_k^\epsilon} \frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \right) dA + \int_{S_k^\epsilon} \left[\psi_R(\mathbf{r}) + \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{\kappa q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \right) dA + O(\epsilon) \quad (17)$$

Первое слагаемое в предыдущем уравнении соответствует регуляризованной энергии самодействия k -того заряда, $W_{k, self}^\epsilon$. Элементарное интегрирование даёт

$$W_{k, self}^\epsilon = \frac{\epsilon_0}{2} \kappa^2 \frac{4\pi q_k^2}{\epsilon} = \frac{\kappa q_k^2}{2\epsilon} \quad (18)$$

Единственное свойство регуляризованной энергии (18), существенное для нашего вычисления, - это то, что *она не зависит от расположения заряда q_k , т. е. от радиус-вектора $\mathbf{r}_k$* .

Регулярность ψ_R и $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|$, $j \neq k$ на поверхности S_k^ϵ и в области D_k^ϵ позволяет нам упростить второе слагаемое правой части (17). В упрощенной форме это соотношение (17) выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{2} \int_{S_k^\epsilon} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dA &= W_{k, self}^\epsilon + \frac{\epsilon_0}{2} \left[\psi_R(\mathbf{r}_k) + \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{\kappa q_j}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|} \right] \int_{S_k^\epsilon} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\kappa q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} \right) dA + O(\epsilon) \\ &= W_{k, self}^\epsilon + \frac{q_k}{2} \left[\psi_R(\mathbf{r}_k) + \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{\kappa q_j}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|} \right] + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

причем множитель 4π , возникающий в результате интегрирования, представляет, естественно, полный телесный угол. Асимптотическое равенство (19) можно дифференцировать по $\mathbf{r}_i$ с той же оценкой остатка.

Подставляя последнее выражение в правую часть (16), получаем:

$$W_D^\epsilon = \sum_{k=1}^N W_{k, self}^\epsilon + \frac{\kappa}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{q_j q_k}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N q_k \psi_R(\mathbf{r}_k) + O(\epsilon) \quad (20)$$

Выражение (20), в свою очередь, подставляется в формулу (12) для силы; при этом видно, что энергии самодействия зарядов, не зависят от расположения последних, так что, хотя и расходятся в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, *но не дают вклада в силу*. Дальнейшие расчеты относительно просты, следует лишь аккуратно дифференцировать последнее слагаемое правой части (20) при $k = i$. В самом деле, как видно из записи (8), величина $\mathbf{r}_i$ встречается в этом случае *дважды* среди аргументов ψ_R , а именно, $\psi_R(\mathbf{r}_i) \equiv \psi_R(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N)$, и дифференцировать необходимо по *обоим* этим аргументам. С учетом этого, формула для силы приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i &= -\kappa q_i \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} + q_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \right] \\ &= \kappa q_i \sum_{k=1, k \neq i}^N q_k \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} + q_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_R(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Этот результат можно выразить в более изящной форме с помощью дополнительных преобразований. Заменяя в (21) ψ_R на его выражение из (6), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i &= -\kappa q_i \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} - \frac{\kappa q_i}{2} \left[\sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_k} + \sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_j) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \right] \\ &= -\kappa q_i \left[\sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{q_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} + \sum_{k=1}^N q_k \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где второе равенство получено с использованием симметрии (5). Для того, чтобы физическая суть формулы стала еще более очевидной, можно преобразовать выражение (22) следующим образом:

$$\mathbf{F}^i = -\kappa q_i \nabla \left\{ \sum_{k=1}^N q_k \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} + G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \right] - \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right\} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = -q_i \nabla \left[\psi(\mathbf{r}) - \frac{\kappa q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \quad (23)$$

Последнее выражение полностью соответствует интуитивным представлениям о формуле для силы: оно записано как раз по обобщенному правилу, предложенному во Введении.

4 Обсуждение

Из выражений (21)–(23) для силы с очевидностью следует, что для зарядов в пустом пространстве (область D - все пространство, границы отсутствуют), $G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_k) \equiv 0$, $\psi_R \equiv 0$, и мы имеем классическую формулу Кулона.

Далее, формула (23) показывает, что закон: “сила - это заряд, умноженный на напряженность поля, в котором он находится”, - действительно работает, *если под этим полем понимать его регулярную часть*. Можно сформулировать некий “минимальный принцип”, а именно: чтобы получить правильный ответ для силы, надо выбросить из поля *только* ту его часть, которая дала бы бесконечный ответ. Как было отмечено во Введении, этот результат просматривается интуитивно. Он становится еще более прозрачным, если заметить, что сингулярная часть поля радиальна, а радиальное поле силы не создает.

Вклад регулярной части поля, созданного зарядом, в силу, действующую на этот самый заряд, особенно важен в случае, когда другие заряды отсутствуют, как видно из простейшего примера с зарядом у проводящей пластины. Именно регулярная часть поля, созданного зарядом (равная полю отраженного заряда), дает полное значение силы.

Рассмотрим теперь важный вопрос о корректности нашей регуляризации, т.е. о том, не зависит ли вдруг выражение для силы от того, каким именно способом регуляризация проводится. Два следующих соображения указывают на то, что регуляризация корректна.

Первое из них относится к использованной нами *геометрической* регуляризации. Если вырезать окрестности зарядов не с помощью сфер, как это было сделано, а посредством других гладких поверхностей, т.е. заменить шар D_k^ϵ вокруг q_k на произвольный “топологический шар”, то нетрудно увидеть, что все члены порядка $O(\epsilon)$ в выражении (20) для регуляризованной энергии не меняются, и, соответственно, наш результат для силы остается верным. Схема доказательства при этом не меняется тоже, только при вычислении интеграла по поверхности S_k^ϵ в формуле (19) следует воспользоваться известным результатом из теории потенциала (см. [13], **п. 193**, или [14]). Что касается первого интеграла в правой части соотношения (17), определяющего энергию самодействия $W_{k, self}^\epsilon$, то нет необходимости искать для него точное выражение, а достаточно воспользоваться его очевидной независимостью от $\mathbf{r}_k$.

Существует и альтернативный подход к регуляризации (он широко использовался классиками в эпоху “до дельта-функции Дирака”). Это *физическая* регуляризация, когда точечный заряд q_k заменяется, в малой области D_k^ϵ , на гладкое распределение заряда с плотностью $\rho_k^\epsilon(\mathbf{r})$ и тем же суммарным зарядом q_k , а затем ϵ устремляется к нулю. В данном случае такой подход оказывается более трудным для расчета, но приводит к тем же $O(\epsilon)$ членам в выражении (20) для регуляризованной энергии. Главное отличие этого подхода в том, что вывод удобнее начинать со следующего выражения для регуляризованной энергии:

$$W_D^\epsilon \equiv \frac{1}{2} \int_D \rho^\epsilon \psi dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{D_k^\epsilon} \rho_k^\epsilon \psi dV, \quad (24)$$

и затем, вместо представления (3) для потенциала, разбить его на сумму потенциалов от $\rho_k^\epsilon(\mathbf{r})$ по D_k^ϵ (которая становится сингулярной в пределе) и регулярную добавку $\psi_R^\epsilon(\mathbf{r})$. Результат для силы, как уже сказано, сохраняется.

Физическая регуляризация используется, в частности, в разделе 3.08 монографии [6] для расчета силы, действующей на один точечный заряд в произвольной области с нулевым потенциалом на границе. Там используется вывод на ‘физическом уровне строгости’, и ответ не доведен до физически наиболее значимой формы (23). Кроме того, окончательный результат [правая часть уравнения (2) раздела 3.08] формально расходится из-за неправильного использования обозначения для полного потенциала там, где должна быть лишь его регулярная часть.

В заключение обсуждения отметим, что в только что решенной электростатической задаче, как и в ее обобщениях, обсуждаемых в следующем разделе, рассматриваются только заряды, находящиеся внутри объема. В других ситуациях, например, в задачах магнитостатики, связанных с магнитными нитями, замороженными в сверхпроводящую среду (см. [15]), появляются и поверхностные заряды (флаксоны). Анализ подобных задач представляет интерес для современной экспериментальной физики (см., напр., [16]). Оказывается, что величина силы, действующей между зарядами на поверхности, существенно зависит от локальной формы последней, например, от кривизны поверхности в точках, где расположены заряды. Поэтому вывод выражения для силы в подобных случаях оказывается значительно более сложным; взаимодействие поверхностных зарядов будет рассмотрено в отдельной публикации.

5 Обобщение: границы других типов

Полученный результат можно обобщить на случай других граничных условий, причем не всегда очевидным путем.

Частное, но полезное, обобщение - случай электродов, когда на границе задается произвольное распределение потенциала, $V(\mathbf{r})$, не обязательно равное нулю:

$$\psi \Big|_S = V(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (25)$$

Разделим потенциал на две части,

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}, \quad (26)$$

из которых первая задается, как и прежде, точечными зарядами при нулевом потенциале на границе, а вторая - следствие исключительно ненулевого граничного потенциала. Тогда $\psi^{(1)}$ удовлетворяет (1), (2),

$$\Delta \psi^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in D; \quad (27)$$

$$\psi^{(1)} \Big|_S = 0. \quad (28)$$

Как было показано выше, сила, действующая на заряд со стороны поля, заданного потенциалом $\psi^{(1)}$, выражается, согласно (23), формулой

$$\mathbf{F}_{(1)}^i = -q_i \nabla \left[\psi^{(1)}(\mathbf{r}) - \frac{\kappa q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \quad (29)$$

При этом потенциал $\psi^{(2)}$, удовлетворяющий задаче

$$\Delta\psi^{(2)} = 0, \quad \mathbf{r} \in D; \quad \psi^{(2)} \Big|_S = V(\mathbf{r}), \quad (30)$$

описывает поле, *внешнее* для всех точечных зарядов, поскольку оно не зависит от их величины и расположения. Таким образом, сила, с которой действует это поле, равна

$$\mathbf{F}_{(2)}^i = -q_i \nabla \psi^{(2)}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \quad (31)$$

Используя принцип суперпозиции, складываем эти две силы и получаем тот же результат (23) для данного случая:

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{F}_{(1)}^i + \mathbf{F}_{(2)}^i = -q_i \nabla \left[\psi(\mathbf{r}) - \frac{\kappa q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right] \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}. \quad (32)$$

При смешанных граничных условиях,

$$\psi \Big|_{S_1} = V(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{S_2} = \sigma(\mathbf{r}), \quad (33)$$

где поверхности S_1, S_2 не пересекаются ($S_1 \cap S_2 = \emptyset$) и в сумме составляют полную границу $S_1 \cup S_2 = S$), а $V(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r})$ - заданные функции, вновь получаем стандартный ответ (23) для силы, без дополнительных технических трудностей. Действительно, как и в представлении (26), потенциал разбивается на две части, определяемые задачами

$$\Delta\psi^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in D; \quad (34)$$

$$\psi^{(1)} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} \Big|_{S_2} = 0, \quad (35)$$

и

$$\Delta\psi^{(2)} = 0, \quad \mathbf{r} \in D; \quad (36)$$

$$\psi^{(2)} \Big|_{S_1} = V(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n} \Big|_{S_2} = \sigma(\mathbf{r}). \quad (37)$$

Формула для силы от потенциала $\psi^{(1)}$ выводится ровно так же, как в разделе 3, что дает результат (29). Внешнее по отношению к зарядам поле потенциала $\psi^{(2)}$ создает силу, определяемую формулой (31), так что суперпозиция опять приводит к той же суммарной силе, что и в (23) [или в (32)].

Для граничных условий второго рода,

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_S = \sigma(\mathbf{r}), \quad \int_S \sigma(\mathbf{r}) dA + Q = 0, \quad Q \equiv \sum_{j=1}^N q_j. \quad (38)$$

разделение потенциала на две части менее очевидно. Дело в критерии разрешимости задачи Неймана, требующем, чтобы полный заряд, равный сумме зарядов в объеме и на поверхности, был равен нулю. При разбиении потенциала на две части это вызывает необходимость добавить и вычесть дополнительный точечный заряд Q (равный сумме точечных зарядов q_i) в произвольной точке $\mathbf{r}_*$ области D . Тогда потенциал можно разбить на два следующим образом:

$$\Delta\psi^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[\sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) \right], \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_* \in D; \quad (39)$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (40)$$

а также

$$\Delta\psi^{(2)} = -\frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_* \in D; \quad (41)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial n} \Big|_S = \sigma(\mathbf{r}), \quad (42)$$

и обе сформулированные задачи разрешимы. Вновь вывод выражения силы, вызываемой потенциалом $\psi^{(1)}$, который удовлетворяет однородному граничному условию, проводится так же, как раньше, и по-прежнему приводит к (29). Внешнее по отношению к зарядам поле потенциала $\psi^{(2)}$ действует на заряд q_i с силой (31), и суперпозиция опять дает в ответе формулу (23). Сама задача (38), однако, не вполне реалистична, за исключением случая изолированной границы, $\sigma(\mathbf{r}) \equiv 0$.

Эта работа выполнена при поддержке по гранту NASA (NAS 8-39225) проекту Gravity Probe B. Кроме того, И. Н. Неменман частично пользовался поддержкой NEC Research Institute. Авторы благодарны Р. В. Вагонеру и В. С. Манделю за ценные замечания, и участникам теоретического семинара GP-B за полезное обсуждение.

Список литературы

- [1] A. J. W. Sommerfeld, *Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1952).
- [2] И. Е. Тамм, *Основы теории электричества* (ГИТТЛ, М., 1957).
- [3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw—Hill, New York, 1941).
- [4] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц, *Теория Поля* (ГИФМЛ, М., 1962).
- [5] Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Наука, М., 1982).
- [6] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (Hemisphere Publ. Corp., New York—Washington—Philadelphia—London, 1989).
- [7] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York—Chichester—Weinheim—Brisbane—Singapore—Toronto, 1999).
- [8] R. P. Feynman, *The Feynman lectures on physics / Feynman, Leighton, Sands* (Addison-Wesley, Redwood City, 1989), vol. 2, *Electromagnetism and matter*.
- [9] J. M. Crowley, *Fundamentals of Applied Electrostatics* (John Wiley and Sons, New York, 1986).
- [10] A. D. Moore, Ed., *Electrostatics and Its Applications* (John Wiley and Sons, New York, 1973).
- [11] R. Mittra, S. W. Lee *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves* (Springer—Verlag, Berlin—New York, 1967).
- [12] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov *The Casimir Effect and its Applications* (Clarendon Press, Oxford, 1997).
- [13] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики, т. IV* (ГИТТЛ, М., 1957).
- [14] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory* (The Macmillan Co., New York, 1971).
- [15] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (McGraw-Hill, New York—Singapore, 1996).
- [16] I. M. Nemenman and A. S. Silbergleit, Explicit Green's function of a boundary value problem for a sphere and trapped flux analysis in Gravity Probe B experiment. *J. Appl. Phys.* **86**, 614 (1999).